ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ ĐÀI TRANG

VỀ TẬP NGHIỆM CỦA HỌ ĐA THỨC TRÊN MỘT TRƯỜNG

THÁI NGUYÊN, THÁNG 10 NĂM 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ ĐÀI TRANG

VỀ TẬP NGHIỆM CỦA HỌ ĐA THỨC TRÊN MỘT TRƯỜNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

GS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

THÁI NGUYÊN, THÁNG 10 NĂM 2018

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn GS.TS Lê Thị Thanh Nhàn, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu trong suốt quá trình tôi thực hiện luận văn. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng cô vẫn dành nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn, động viên, khuyến khích tôi từ khi tôi tiếp cận đề tài đến khi tôi hoàn thành luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Toán - Tin và Phòng Đào tạo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn các Thầy, Cô đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thiện luận văn này.

Cuối cùng tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, những người đã không ngừng động viên, hỗ trợ tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, ngày 04 tháng 10 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Đài Trang

LỜI MỞ ĐẦU

Đối với đa thức một biến trên trường K, bài toán tìm nghiệm là bài toán cơ bản. Trong khi đó đa thức nhiều biến nhìn chung có vô số nghiệm và việc nghiên cứu một nghiệm riêng lẻ là không khả thi. Thay vào đó, người ta nghiên cứu tập các nghiệm của một đa thức hay một họ đa thức. Cho K là một trường, cho S là một tập con của vành đa thức n biến với hệ số trên K. Tập nghiệm của S được gọi là một tập đại số và được kí hiệu là $Z(S)$.

Mục đích của luận văn là trình bày lại một số vấn đề cơ bản về tập đại số trong K^n (tức là tập nghiệm của một họ đa thức n biến trên một trường K). Luận văn thuộc lĩnh vực Hình học đại số, ở đó người ta dùng công cụ của Đại số (vành đa thức, iđêan, iđêan nguyên tố, ...) để nghiên cứu các vật Hình học (tập đại số, tập đại số bất khả quy, ...). Luận văn gồm hai chương. Chương 1 trình bày khái niệm và ví dụ tập đại số, đồng thời nêu lại chứng minh Định lí cơ sở Hilbert về tính hữu hạn sinh của các iđêan trong vành đa thức. Định lí cơ sở Hilbert cho phép ta quy mỗi tập đại số về tập nghiệm của một họ gồm hữu hạn đa thức.

Chương 2 trình bày lại Định lý không điểm Hilbert. Định lí này phát biểu rằng tập nghiệm của một iđêan thực sự trong vành đa thức trên một trường đóng đại số bao giờ cũng là tập khác rỗng. Định lý không điểm Hilbert là sự tổng quát của Định lý cơ bản của Đại số. Nhờ Định lí này, chúng ta thiết lập được một quan hệ song ánh giữa các tập đại số trong K^n và các iđêan căn trong vành đa thức n biến trên K, khi K là đóng đại số. Phần tiếp theo của Chương 2 dành để tập trung nghiên cứu tập đại số bất khả quy (tức là tập đại số khác rỗng và không là hợp của hai tập đại số bé hơn) và Định lí phân tích duy nhất tập đại số thành hợp của hữu hạn tập đại số bất khả quy. Sử dụng Định lí cơ sở Hilbert, chúng ta có thể chỉ ra mối quan hệ song ánh giữa các tập đại số bất khả quy trong K^n và các iđêan nguyên tố trong vành đa thức n biến trên trường đóng đại số K.

Hai tiết cuối Chương 2 trình bày những ứng dụng xét tính bất khả quy của đa thức nhiều biến và tính nguyên tố của iđêan trong vành đa thức nhiều biến (xem Định lí 2.4.5, Định lí 2.5.1). Kết quả trong hai tiết này là những đóng góp mới của luận văn.

Tài liệu tham khảo chính của luận văn là cuốn sách [2]. Riêng phần Định lí không điểm của Hilbert, chúng tôi chủ yếu dựa vào cuốn sách [4].

Thái Nguyên, ngày 04 tháng 10 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Đài Trang

Chương 1

Tập nghiệm của họ đa thức

Trong suốt chương này luôn giả thiết V là một vành giao hoán. Ký hiệu $V[x_1, \ldots, x_n]$ là tập các đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong V. Chú ý rằng vành $V[x_1, \ldots, x_n]$ là một *vành giao hoán* với phép cộng và nhân đa thức, với phần tử đơn vị là đa thức 1 và phần tử không là đa thức 0. Cho V_1 là một vành giao hoán chứa V. Cho K là một trường.

Các tài liệu tham khảo chính của Chương 1 là [1] và [2].

1.1 Tập đại số

Trong tiết này chúng tôi tập trung giới thiệu khái niệm tập đại số, đồng thời đưa ra một số ví dụ về tập đại số.

Định nghĩa 1.1.1. Một bộ n phần tử $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V_1^n$ được gọi là một *nghiệm của đa thức* $f(x_1, \ldots, x_n) \in V[x_1, \ldots, x_n]$ nếu $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Khi đó ta cũng nói $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ là một *nghiệm của phương trình đa thức* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho đa thức $f(x_1, \ldots, x_n) \in V[x_1, \ldots, x_n]$. Khi đó ta có ánh xạ $f : V^n \to V$ cho ứng mỗi phần tử $(a_1, \ldots, a_n) \in V^n$ với phần tử $f(a_1, \ldots, a_n) \in V$. Ta gọi f là *hàm đa thức* n biến trên V tương ứng với đa thức $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Kết quả quan trọng sau đây cho phép ta có thể đồng nhất mỗi đa thức với một hàm đa thức, dưới giả thiết V là một miền nguyên vô hạn.

Nhắc lại rằng vành giao hoán V được gọi là một miền nguyên nếu V khác vành 0 và nếu $a, b \in V$ là hai phần tử khác 0, thì $ab \neq 0$.

Định lý 1.1.3. *Nếu V là miền nguyên vô hạn thì ánh xạ φ cho tương ứng mỗi đa thức $f(x_1, \ldots, x_n) \in V[x_1, \ldots, x_n]$ với hàm đa thức f là một song ánh từ tập các đa thức $V[x_1, \ldots, x_n]$ đến tập các hàm đa thức n biến trên V. Đặc biệt, đa thức $f(x_1, \ldots, x_n)$ là đa thức 0 khi và chỉ khi hàm đa thức f là hàm không.*

Chứng minh. Nếu $f(x_1, \ldots, x_n)$ là đa thức 0 thì rõ ràng hàm đa thức tương ứng là hàm 0. Ta chứng minh chiều ngược lại bằng quy nạp theo n. Giả thiết rằng f là hàm 0, tức là $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ với mọi $(a_1, \ldots, a_n) \in V^n$. Cho $n = 1$. Khi đó $f(a_1) = 0$ với mọi $a_1 \in V$. Do đó đa thức một biến $f(x_1)$ nhận mọi phần tử của V làm nghiệm. Vì V là vô hạn nên $f(x_1)$ có vô hạn nghiệm. Suy ra $f(x_1) = 0$. Cho $n > 1$ và giả thiết kết quả đúng cho trường hợp $n - 1$ biến. Biểu diễn

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{k} f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^i,$$

trong đó $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ với mọi $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Với mỗi phần tử $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in V^{n-1}$, đặt $g_a(x_n) = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n)$. Khi đó

$$g_a(x_n) = \sum_{i=0}^{k} f_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) x_n^i \in V[x_n].$$

Theo giả thiết, $g_a(x_n)$ là đa thức một biến nhận mọi phần tử của V làm nghiệm. Do V là miền nguyên vô hạn nên ta có $g_a(x_n)$ là đa thức 0. Vì thế $f_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ với mọi $i \in \{1, \ldots, k\}$. Như vậy, đa thức $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ nhận mọi phần tử của V^{n-1} làm nghiệm. Theo giả thiết quy nạp, $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1})$ là đa thức 0 với mọi $i \in \{0, \ldots, k\}$. Do đó $f(x_1, \ldots, x_n)$ là đa thức 0.

Cuối cùng ta chứng minh ánh xạ φ cho tương ứng đa thức $f(x_1, \ldots, x_n)$ với hàm đa thức f là song ánh từ $V[x_1, \ldots, x_n]$ đến tập các hàm đa thức từ V^n đến V. Rõ ràng φ là toàn ánh. Nếu hai đa thức $f(x_1, \ldots, x_n)$ và $g(x_1, \ldots, x_n)$ cho hai hàm đa thức bằng nhau thì đa thức

$$f(x_1, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n)$$

cho hàm đa thức 0. Theo kết quả trên, $f(x_1,\dots,x_n) - g(x_1,\dots,x_n)$ là đa thức 0, tức là $f(x_1,\dots,x_n) = g(x_1,\dots,x_n)$. Vì thế φ là đơn ánh. $\square$

Chú ý rằng nếu V có hữu hạn phần tử thì ánh xạ trong Định lý 1.1.3 nói chung không là song ánh. Thật vậy, nếu $V = \{a_1,\dots,a_r\}$ thì với mỗi số tự nhiên n, ta có đa thức n biến khác 0

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)\dots(x_i - a_r),$$

nhưng hàm đa thức tương ứng với nó lại là hàm 0.

Chú ý 1.1.4. Đối với đa thức một biến trên trường K, bài toán tìm nghiệm là bài toán cơ bản. Chú ý rằng mỗi đa thức khác không trong $K[x]$ chỉ có hữu hạn nghiệm (số nghiệm không vượt quá bậc của nó). Trong khi đó đa thức nhiều biến nhìn chung có vô số nghiệm và việc nghiên cứu một nghiệm riêng lẻ là không khả thi. Thay vào đó, người ta nghiên cứu tập các nghiệm của một đa thức hay một họ đa thức. Những tập nghiệm như vậy gọi là tập đại số. Ký hiệu

$$K^n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in K, i = 1,\dots,n\}.$$

Ta gọi K^n là *không gian affin n chiều*. Đặc biệt $K = K^1$ được gọi là *đường thẳng affin*, K^2 được gọi là *mặt phẳng affin*. Với mỗi tập con S của $K[x_1,\dots,x_n]$, ký hiệu

$$Z(S) = \{(a_1,\dots,a_n) \in K^n \mid f(a_1,\dots,a_n) = 0, \forall f \in S\}.$$

Tập $Z(S)$ được gọi là *tập nghiệm* của S (hay *tập các không điểm chung* của S).

Định nghĩa 1.1.5. Một tập con X của K^n được gọi là *tập đại số* (hay *đa tạp affin*) nếu tồn tại $S \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$ sao cho $X = Z(S)$. Khi đó ta nói X là *tập đại số định nghĩa bởi S*.

Cho $X = Z(S)$ là một tập đại số trong K^n. Nếu $S = \{f\}$ thì ta viết $X = Z(f)$. Nếu f khác hằng thì $Z(f)$ được gọi là một *siêu mặt* trong K^n. Nếu $S = \{f_1,\dots,f_k\}$ là tập hữu hạn thì ta viết $X = Z(f_1,\dots,f_k)$. Chú ý rằng mỗi tập đại số (khác $\emptyset$ và khác K^n) đều là giao của một họ siêu mặt, vì ta có $X = Z(S) = \bigcap\limits_{f\in S} Z(f)$.

Ví dụ 1.1.6. (i) Tập $X = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ là tập đại số. Vì nó là tập nghiệm của họ gồm hai đa thức $\{x_1, x_2\} \subseteq K[x_1, x_2]$.
(ii) Tập $X = \{t^m, t^n) \mid t \in \mathbb{R}\}$ với m, n là hai số nguyên tố cùng nhau là tập đại số. (Chúng ta có thể xem Hệ quả 2.4.7 ở Chương 2, ở đó có chứng minh chi tiết X là tập đại số).

Ví dụ 1.1.7. (i) Trong mặt phẳng *affin* $\mathbb{R}^n$, tập đại số $Z(x^2+y^2-4)$ là đường tròn bán kính bằng 2 và tâm là gốc tọa độ. Trong hình học giải tích, các đường tròn, đường elip, parabol, hypebol đều là các tập đại số.
(ii) Trong không gian *affin 3-chiều* $\mathbb{R}^3$, tập đại số $Z(z-x^2-y^2)$ là mặt paraboloid tròn xoay, thu được bằng cách quay parabol $z = x^2$ quanh truc z. Các mặt bậc hai ellipsoid, hyperboloid cũng là các tập đại số.

Ví dụ 1.1.8. Cho $X = \{(a,a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 1\}$. Khi đó X không là tập đại số trong $\mathbb{R}^2$. Thật vậy, giả sử X là tập đại số. Khi đó tồn tại tập con S của vành đa thức hai biến $\mathbb{R}[x,y]$ sao cho $X = Z(S)$. Lấy $f(x,y) \in S$ tùy ý. Đặt $g(t) = f(t,t)$ và xét $g(t)$ như đa thức một biến t với hệ số thực. Vì $f(x,y) \in S$ nên $f(x,y)$ triệt tiêu trên X. Do đó ta có $f(a,a) = 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$ và $a \neq 1$. Suy ra $g(a) = 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$ và $a \neq 1$. Do $\mathbb{R}$ là trường (và do đó nó là miền nguyên) có vô hạn phần tử, nên $g(t)$ là đa thức một biến nhận vô hạn nghiệm. Do đó $g(t)$ là đa thức 0. Do đó $g(1) = 0$. Suy ra $f(1,1) = 0$. Như vậy, $(1,1)$ là nghiệm của mọi đa thức trong S. Do đó $(1,1) \in Z(S)$. Suy ra $(1,1) \in X$. Điều này là vô lí. Vậy, X không là tập đại số.

Bằng các lập luận tương tự như trong Ví dụ 1.1.8, ta có các ví dụ sau đây về các tập con của $\mathbb{R}^n$ không là tập đại số.

Ví dụ 1.1.9. Các tập hợp sau đây không là tập đại số trong $\mathbb{R}^n$.

(i) $X = \{(a,a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq r\}$, trong đó $n = 2$ và r là một số thực tùy ý cho trước.

(ii) $Y = \{(a, sa) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq r\}$, trong đó $n = 2$ và r, s là các số thực tùy ý cho trước.

(iii) $Z = \{(s_1 a, s_2 a, \ldots, s_n a) \in \mathbb{R}^n \mid a \neq r\}$, trong đó $r, s_1, \ldots, s_n$ là các số thực tùy ý cho trước với ít nhất một chỉ số i sao cho $s_i \neq 0$.